

**Objectifs**

- Quantifier la répétabilité (EV) et la reproductibilité (AV) d'un pied à coulisse
- Calculer les indicateurs %R&R/tolérance, %R&R/process et ndc par la méthode ANOVA
- Identifier les limites de l'échantillon et conclure sur la validité du moyen de mesure

**Durée et niveau de difficulté****Préparation : 15 minutes****Exécution : 1 heure et 30 minutes****Difficulté****Matériel**

Désignation	Qté	Référence
Pied à coulisse digital	1	251436
Lot de 10 pièces	1	

Informations complémentaires

Les pièces ont été fabriquées par impression 3D lors d'une seule session consécutive. Cela affecte la représentativité de l'échantillon (voir page n°6). À noter : l'étude utilise le facteur historique $K=5,15$ au lieu du standard actuel Six Sigma ($K=6$).

**Problématique**

Un pied à coulisse est utilisé pour contrôler des pièces à 20 ± 1 mm ($IT=2$ mm). Trois opérateurs effectuent chacun 3 mesures sur 10 pièces, soit 90 mesures au total. **Le bruit de mesure est-il négligeable devant la variabilité des pièces ? Le système de mesure est-il capable de discriminer les pièces et de piloter le process ?**

**Protocole****Montage***Schéma du dispositif*

- Mesurer chaque pièce 3 fois par opérateur (répétabilité)
- Faire mesurer chaque pièce par les 3 opérateurs de façon indépendante
- Rendre aléatoire l'ordre des mesures pour éviter les biais
- Relever toutes les valeurs dans le tableau de saisie
- Calculer SSA, SSB, SSAB, SSE et construire le tableau ANOVA
- Appliquer les tests de Fisher ($F_{calculé}$ vs $F_{critique}$)
- Calculer EV, AV, R&R, V_p , TV et les indicateurs %
- Calculer le ndc et conclure sur la capacité du moyen





Résultats

Paramètres de l'étude

Le plan d'expérience est structuré autour des paramètres suivants :

- a = 3 : Nombre d'opérateurs.
- b = 10 : Nombre de pièces mesurées (Cote cible 20 mm, Intervalle de Tolérance IT = 2 mm).
- n = 3 : Nombre de répétitions (essais) par opérateur sur chaque pièce.
- N = a x b x n = 90 : Nombre total de mesures.

Tableau de valeurs

	Opérateur 1			$\bar{X}$	R1	Opérateur 2			$\bar{X}$	R2	Opérateur 3			$\bar{X}$	R3	$\bar{\bar{X}}$	$\bar{R}$
Pièce 1	19,90	19,89	19,89	19,89	0,006	19,89	19,91	19,90	19,90	0,010	19,90	19,91	19,90	19,90	0,006	19,90	0,02
Pièce 2	19,89	19,90	19,90	19,90	0,006	19,90	19,90	19,91	19,90	0,006	19,91	19,90	19,90	19,90	0,006	19,90	0,02
Pièce 3	19,90	19,90	19,90	19,90	0,000	19,91	19,90	19,90	19,90	0,006	19,90	19,89	19,90	19,90	0,006	19,90	0,01
Pièce 4	19,90	19,89	19,88	19,89	0,010	19,90	19,90	19,89	19,90	0,006	19,90	19,88	19,90	19,89	0,012	19,89	0,03
Pièce 5	19,91	19,93	19,92	19,92	0,010	19,93	19,91	19,92	19,92	0,010	19,91	19,93	19,93	19,92	0,012	19,92	0,03
Pièce 6	19,92	19,90	19,92	19,91	0,012	19,91	19,90	19,92	19,91	0,010	19,93	19,92	19,92	19,92	0,006	19,92	0,03
Pièce 7	19,92	19,92	19,93	19,92	0,006	19,92	19,92	19,91	19,92	0,006	19,92	19,92	19,92	19,92	0,000	19,92	0,01
Pièce 8	19,89	19,89	19,88	19,89	0,006	19,89	19,89	19,90	19,89	0,006	19,90	19,91	19,89	19,90	0,010	19,89	0,02
Pièce 9	19,90	19,90	19,89	19,90	0,006	19,89	19,90	19,90	19,90	0,006	19,88	19,88	19,89	19,88	0,006	19,89	0,02
Pièce 10	19,92	19,91	19,91	19,91	0,006	19,91	19,93	19,92	19,92	0,010	19,90	19,92	19,90	19,91	0,012	19,91	0,03
				19,90	0,007					19,91	0,007					19,91	0,007
				$\bar{\bar{X}}$	$\bar{R}_1$					$\bar{\bar{X}}$	$\bar{R}_2$					$\bar{\bar{X}}$	$\bar{R}_3$
Moyenne globale				$\bar{\bar{X}}$		19,90				$\bar{\bar{R}}$		0,007					

Les sommes fondamentales (Y)

Pour appliquer l'ANOVA, nous calculons d'abord la somme algébrique des mesures pour chaque facteur.

Somme totale (Y..) : Somme des 90 mesures = 1791.44

Sommes par Opérateur (Yi..) (somme de leurs 30 mesures respectives) :

- Opérateur 1 : 597.10 | Opérateur 2 : 597.18 | Opérateur 3 : 597.16

Sommes par Pièce (Y.j.) (somme des 9 mesures pour chaque pièce) :

- P1: 179.09 | P2: 179.11 | P3: 179.10 | P4: 179.04 | P5: 179.29 | P6: 179.24 | P7: 179.28 | P8: 179.04 | P9: 179.03 | P10: 179.22

Décomposition de la variance : calcul des sommes des carrés (SS)

Pour analyser les différentes sources de variabilité, nous commençons par calculer un Facteur de Correction (FC) basé sur la somme totale des 90 mesures. Cela permet de centrer nos calculs sur la variance plutôt que sur la valeur brute des pièces :

$$FC = \frac{Y_{..}^2}{N} = \frac{1791.44^2}{90} = 35658.40$$





Calcul de SSA (Variabilité due aux opérateurs) :

Nous analysons ici l'écart entre les sommes totales des mesures de chaque opérateur par rapport à la moyenne globale.

$$SSA = \sum_{i=1}^a \frac{(Y_{i.})^2}{bn} - \frac{Y_{..}^2}{N} = 0.00011556$$

Calcul de SSB (Variabilité due aux pièces) :

Ce tableau met en évidence la dispersion naturelle des 10 pièces mesurées, qui représente la variabilité intrinsèque de notre processus d'impression 3D.

Pièce n°	Σ des 9 mesure	Au carré
Pièce 1	179,09	32073,23
Pièce 2	179,11	32080,39
Pièce 3	179,10	32076,81
Pièce 4	179,04	32055,32
Pièce 5	179,29	32144,90
Pièce 6	179,24	32126,98
Pièce 7	179,28	32141,32
Pièce 8	179,04	32055,32
Pièce 9	179,03	32051,74
Pièce 10	179,22	32119,81

$$SSB = \sum_{j=1}^b \frac{(Y_{.j})^2}{an} - \frac{Y_{..}^2}{N} = 0.01060444$$

Calcul de SSAB (Interaction Opérateur/Pièce) :

Ce tableau croise les résultats pour vérifier si un opérateur particulier a des difficultés de mesure avec une pièce spécifique (par exemple, une pièce difficile à positionner).

$$SSAB = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{(Y_{ij.})^2}{n} - \frac{Y_{..}^2}{N} - SSA - SSB = 0.00152889$$

Pièce n°	Opérateur 1	Opérateur 2	Opérateur 3	Op 1 ²	Op 2 ²	Op 3 ²
Pièce 1	59,68	59,70	59,71	3561,70	3564,09	3565,28
Pièce 2	59,69	59,71	59,71	3562,90	3565,28	3565,28
Pièce 3	59,70	59,71	59,69	3564,09	3565,28	3562,90
Pièce 4	59,67	59,69	59,68	3560,51	3562,90	3561,70
Pièce 5	59,76	59,76	59,77	3571,26	3571,26	3572,45
Pièce 6	59,74	59,73	59,77	3568,87	3567,67	3572,45
Pièce 7	59,77	59,75	59,76	3572,45	3570,06	3571,26
Pièce 8	59,66	59,68	59,70	3559,32	3561,70	3564,09
Pièce 9	59,69	59,69	59,65	3562,90	3562,90	3558,12
Pièce 10	59,74	59,76	59,72	3568,87	3571,26	3566,48

Calcul de TSS (Variabilité global calculée sur les 90 mesures au carré) :

$$TSS = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n Y_{ijk}^2 - \frac{Y_{..}^2}{N} = 0.01584889$$

Calcul de SSE (Erreur résiduelle) :

$$SSE = TSS - SSA - SSB - SSAB = 0.00360000$$





Tableau récapitulatif ANOVA et décision statistique :

Nous regroupons l'ensemble des sommes des carrés (SS) que nous divisons par leurs degrés de liberté (ddl) pour obtenir les Moyennes des Carrés (MS). Nous calculons ensuite la statistique F pour tester la significativité de chaque facteur.

Source des erreurs	Somme des carrés	Degré de Liberté	Moyenne des carrés	F Statistique
Opérateurs	SSA	a-1	$MSA = \frac{SSA}{a-1}$	$F = \frac{MSA}{MSE}$
Pièces	SSB	b-1	$MSB = \frac{SSB}{b-1}$	$F = \frac{MSB}{MSE}$
Interaction (Opérateurs, Pièces)	SSAB	(a-1)(b-1)	$MSAB = \frac{SSAB}{(a-1)(b-1)}$	$F = \frac{MSAB}{MSE}$
Instrument (Erreur)	SSE	ab(n-1)	$MSE = \frac{SSE}{ab(n-1)}$	
Total	TSS	N-1		

Voici le tableau avec nos valeurs :

Source des erreurs	$\sum$ des carrés	Ddl	Moyenne carrés	F statistique
Opérateurs	0,00011556	2	0,000058	0,9629629
Pièces	0,01060444	9	0,001178	19,63786
Interaction	0,00152889	18	0,000085	1,4156379
Instrument	0,00360000	60	0,000060	
Total	0,01584889	89		

Analyse du test de Fisher (F) :

Le test crucial concerne l'Interaction (Opérateurs/Pièces).

Dans notre cas, le Fstatistique de l'interaction, calculé avec l'erreur pure, est de 1,415.

En consultant la table de Fisher pour 18 et 60 degrés de liberté au risque $\alpha = 5\%$ (niveau de confiance 95%), la valeur critique Fcritique est d'environ 1,84.

Puisque $1,415 < 1,84$, l'interaction n'est pas statistiquement significative. Suivant les règles de la métrologie, nous devons fusionner l'interaction avec l'erreur pure de l'instrument pour obtenir une estimation plus robuste de la variance de répétabilité :

• Somme des carrés (SS) poolée : $SSAB + SSE = 0,0015288 + 0,0036000 = \mathbf{0,0051288}$

• Degrés de liberté (ddl) poolés : $18 + 60 = \mathbf{78}$

• Moyenne des carrés poolée (MSE) : $0,0051288 / 78 = \mathbf{0,00006575}$ (C'est cette valeur qui servira de base au calcul de l'EV).

Composantes métrologiques finales (Gauge R&R) :

Pour traduire ces variances mathématiques en grandeurs physiques comparables à notre tolérance (exprimée en mm), nous appliquons un facteur d'élargissement K. Historiquement, la norme utilise $K = 5,15$, ce qui permet de couvrir 99% de la distribution normale de l'erreur.





Calcul Répétabilité EV :

$$\text{Répétabilité} = 5,15 \cdot \sqrt{\text{MSE}} = 0,00006575$$

Calcul Reproductibilité AV :

Le test F pour les opérateurs (0,878) étant très inférieur à 1, leur effet est noyé dans le bruit de mesure. On considère donc AV = 0.

Calcul Variabilités pièces (Vp) :

$$V_p = 5,15 \cdot \sqrt{\frac{\text{MSB} - \text{MSAB}}{a \cdot n}} = 0,05676$$

Tableaux des résultats dimensionnels :

Composante de variance	Symbole	Valeur calculée
Répétabilité (bruit instrument)	EV	0,04176
Reproductibilité (bruit opérateurs)	AV	0
Interaction	I	0
Gauge R&R global	R&R	0,04176
Variabilité liée à la pièce	Vp	0,05676
Variabilité totale process	TV	0,07046

$$\text{R\&R} = \sqrt{\text{Répétabilité}^2 + \text{Reproductibilité}^2 + I^2}$$

$$V_T = \sqrt{\text{R\&R}^2 + V_p^2}$$

Tableaux des indicateurs de capacité :

L'évaluation du système se fait selon deux axes : sa capacité à valider la Tolérance (IT = 2 mm) et sa capacité à surveiller le Process (TV).

Analyse par rapport au process	Résultat	Analyse par rapport à la tolérance	Résultat
%EV	59,26%	%EV	2%
%AV	0%	%AV	0%
%R&R Total	59,26%	%R&R Total	2,08%

Nombre de catégories distinctes (ndc) : Ce critère évalue combien de groupes de pièces le système peut discerner de manière fiable.

$$ndc = 1,41 \cdot \left(\frac{V_p}{\text{R\&R}} \right) \approx 2$$





Conclusion

Contrôle Produit : Validé. Avec un ratio %R&R / Tolérance de 2,09 % (excellent car $< 10\%$), l'incertitude de l'instrument est négligeable face aux 2 mm de tolérance. Il est parfaitement fiable pour trier les pièces conformes et non conformes.

Contrôle Process : Biaisé. Les indicateurs de suivi sont dans le rouge (%R&R / Process à 59 % et ndc à 2). Ce n'est pas un défaut du pied à coulisse, mais un biais d'échantillonnage.

Les 10 pièces ayant été imprimées en une seule session, elles sont des "clones". Cette absence de dispersion naturelle (la variance V_p est écrasée) fausse mathématiquement le calcul du %R&R process.

Recommandation : Pour évaluer la capacité de l'instrument à piloter la production, il faut refaire l'étude avec des pièces issues de lots ou de jours différents afin de capter la véritable variabilité du procédé.

